الفصل الثالث

٣-٣ العمليات على كثيرات الحدود

Operations with Polynomials

لماذا؟

يستغرق وصول ضوء الشمس إلى الأرض 8 دقائق تقريبًا؛ إذ يسير الضوء بسرعة كبيرة تصل إلى $3 \times 10^8 \, m/s$ تقريبًا.

ما الوقت الذي سيستغرقه وصول الضوء إلينا من مجرة تبعد مسافة $2.367 \times 10^{21} m$ تقريبًا؟



فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم القوى. (مهارة سابقة)

والآن:

- أضرب وحيدات حد وعبارات تتضمن قوى، وأقسمها وأبسطها.
- أجمع كثيرات حدود، وأطرحها وأضربها.

المفردات:

التبسيط
simplifying

درجة كثيرة الحدود
Degree of a polynomial

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تذكّر أن وحيدة الحد هي: عدد، أو متغير، أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة، وتتكون من حد واحد فقط. والجدول الآتي يلخص خصائص الأسس التي تساعد على ضرب وقسمة وحيدات الحد وتبسيطها، حيث إن عملية **تبسيط** عبارات تتضمن قوى تعني إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة.

الفصل الثالث

٣-٣ العمليات على كثيرات الحدود

ملخص المفهوم

خصائص الأسس

أضف إلى مطويتك

لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ، حيث $x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}, \frac{1}{x^{-a}} = x^a$ ، حيث $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

٣-٣ العمليات على كثيرات الحدود

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد من أنك قد كتبتها في أبسط صورة.

مفهوم أساسي

تبسيط وحيدات الحد

أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواسًا أو أسسًا سالبة.

مثال 1

تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

a) $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

$(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2}) = 6ab^2c^{-2}$ اضرب 2 في 3، واضرب a^{-2} في a^3

$= 6ab^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$ تعريف الأسس السالبة

$= \frac{6ab^2}{c^2}$ بسّط



الفصل الثالــث

٣-٢ العمليات على كثيرات الحدود

مثال 1 تبسيط العبارات

بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

(b $\frac{q^2r^4}{q^7r^3}$

$\frac{q^2r^4}{q^7r^3} = q^{2-7} \cdot r^{4-3}$ قسمة القوى

$= q^{-5}r$ اطرح الأسس

$= \frac{r}{q^5}$ تعريف الأسس السالبة

(c $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

$\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3 = \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3}$ قوة ناتج القسمة

$= \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3}$ قوة ناتج الضرب

$= \frac{-8a^{12}}{b^6}$ قوة القوة

إرشادات للدراسة

تحقق

يمكنك التحقق من إجابتك دائمًا باستعمال تعريف الأسس، فمثلًا:

$\frac{q^2}{q^7} = \frac{q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}$

$= \frac{1}{q^5}$



الفصل الثالث
٣-٣ العمليات على كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

(1A $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

$$(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$$

$$=\left(\frac{2y^3}{x^3}\right)\left(\frac{-7x^5}{y^6}\right)$$

$$=\frac{-14x^2}{y^3}$$

(1B $\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

$$\frac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}=\frac{5c^3}{-d^4}=-\frac{5c^3}{d^4}$$

(1C $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$

$$\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}=\left(\frac{4}{a}\right)^3$$

$$=\frac{4^3}{a^3}$$

$$=\frac{64}{a^3}$$

(1D $(-2x^3y^2)^5$

$$=-32\,x^{15}y^{10}$$



الفصل الثالــث

٣-٢ العمليات على كثيرات الحدود

العمليات على كثيرات الحدود: **درجة كثيرة الحدود** المبسّطة هي أكبر درجة لوحيدات الحد المك
فمثلًا درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

مثال 2 درجة كثيرة الحدود

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

a) $\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$

تعدّ هذه العبارة كثيرة حدود؛ لأن كل حد فيها هو وحيدة حد؛ ودرجة الحد الأول فيها تساوي $4 + 3 = 7$، ودرجة الحد الثاني 5؛ لذا فإن درجة كثيرة الحدود 7.

b) $\sqrt{x} + x + 4$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن $\sqrt{x}$ ليست وحيدة حد.

c) $x^{-3} + 2x^{-2} + 6$

هذه العبارة ليست كثيرة حدود؛ لأن كلًا من: x^{-3}, x^{-2} ليست وحيدة حد؛
حيث $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$، ووحيدات الحد لا تتضمن متغيرات في المقام.

إرشادات للدراسة

كثيرات الحدود
تذكر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد، وتسمى كل وحيدة حد منها حدًا في كثيرة الحدود. ودرجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها.

تحقق من فهمك :-

(2A $\frac{x}{y} + 3x^2$

ليست كثيرة حدود؛ لأن $\frac{x}{y}$ ليست وحيدة حد.

(2B $x^5 y + 9 x^4 y^3 - 2xy$

كثيرة حدود؛ من الدرجة 7.

مثال 3 جمع كثيرات الحدود وطرحها

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي، واكتبه في أبسط صورةٍ:

a) $(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$

تخلّص من الأقواس وجمّع الحدود المتشابهة.

$(4x^2 - 5x + 6) - (2x^2 + 3x - 1)$	العبارة الأصلية
$= 4x^2 - 5x + 6 - 2x^2 - 3x + 1$	وزّع العدد -1
$= (4x^2 - 2x^2) + (-5x - 3x) + (6 + 1)$	جمّع الحدود المتشابهة
$= 2x^2 - 8x + 7$	اجمع الحدود المتشابهة

b) $(6x^2 - 7x + 8) + (-4x^2 + 9x - 5)$

رتّب الحدود المتشابهة رأسيًا، وأوجد ناتج الجمع.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x + 8 \\ (+)\ -4x^2 + 9x - 5 \\ \hline 2x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

إرشادات للدراسة

طرائق بديلة

لاحظ أن المثال $3a$ يستعمل طريقة الجمع الأفقي، على حين يستعمل المثال $3b$ طريقة الجمع الرأسي، وكلتاهما تؤدي إلى الإجابة الصحيحة.

تحقق من فهمك :-

$(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$ **(3A**

$$(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$$

$$= -x^2 - 3x + 4 - x^2 - 2x - 5$$

$$= -2x^2 - 5x - 1$$

$(3x^2 - 6) + (-x + 1)$ **(3B**

$$(3x^2 - 6) + (-x + 1)$$

$$= 3x^2 - 6 - x + 1$$

$$= 3x^2 - x - 5$$

يمكنك استعمال خاصية التوزيع لضرب كثيرات الحدود.

مثال 4 ضرب وحيدة حدٍّ في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $3x(2x^2 - 4x + 6)$، واكتبه في أبسط صورة.

$$3x(2x^2 - 4x + 6) = 3x(2x^2) + 3x(-4x) + 3x(6)$$ خاصية التوزيع

$$= 6x^3 - 12x^2 + 18x$$ اضرب في وحيدة الحد

إرشادات للدراسة

قانون المسافة

تذكَّر أن:

المسافة = السرعة × الزمن



تحقق من فهمك :-

$$\frac{4}{3}x^2\,(6x^2 + 9x - 12) \quad \textbf{(4A}$$

$$\frac{4}{3}x^2\,(6x^2 + 9x - 9) = 8x^4 + 12x^3 - 16\,x^2$$

$$-2a(-3a^2 - 11a + 20) \quad \textbf{(4B}$$

$$-2a(-3a^2 - 11a + 20) = 6a^3 + 22a^2 - 40a$$

مثال 5 ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$، واكتبه في أبسط صورة.

$$(n^2 + 4n - 6)(n + 2) = n^2(n + 2) + 4n(n + 2) + (-6)(n + 2)$$ خاصية التوزيع

$$= n^2 \cdot n + n^2 \cdot 2 + 4n \cdot n + 4n \cdot 2 + (-6) \cdot n + (-6) \cdot 2$$ خاصية التوزيع

$$= n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 8n - 6n - 12$$ اضرب وحيدات الحد

$$= n^3 + 6n^2 + 2n - 12$$ اجمع الحدود المتشابهة



تحقق من فهمك :-

5A) $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

$=x^2(x - 4) + 4x(x - 4) + 16(x - 4)$ خاصية التوزيع

$=x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 16x + 16x - 64$ ضرب وحيدات الحد

$=x^3 - 64$ جمع الحدود المتشابهة

5B) $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

$=2x^2(3x - 1) - 4x(3x - 1) + 5(3x - 1)$ خاصية التوزيع

$=6x^3 - 2x^2 + 12x^2 + 4x + 15x - 5$ ضرب وحيدات الحد

$=6x^3 + 10x^2 + 19x - 5$ جمع الحدود المتشابهة

٣-٣ العمليات على كثيرات الحدود

يمكنك استعمال كثيرات الحدود لتمثيل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة — كتابة عبارة كثيرة حدود

قيادة: تتطلب أنظمة إحدى شركات النقل البري أن تكون مدة قيادة سائقي الشاحنات 10 ساعات يوميًا، تتخللها فترة استراحة، فإذا قاد أحد سائقي الشركة شاحنته في فترة ما قبل الاستراحة بسرعة 90km/h ، وبعد الاستراحة بسرعة 100km/h ، فاكتب كثيرة حدود تمثل المسافة التي قطعها .

التعبير اللفظي: قاد السائق سيارته بسرعة 90 km/h في فترة ما قبل الاستراحة ، و 100 km/h في فترة ما بعد الاستراحة .

المتغير: ليكن x عدد ساعات القيادة قبل الاستراحة.

العبارة: $90\,x + 100\,(10 - x)$

$90x + 100(10 - x) = 90x + 1000 - 100x$ خاصية التوزيع

$= 1000 - 10x$ اجمع الحدود المتشابهة

فتكون كثيرة الحدود هي $1000 - 10x$

تحقق من فهمك :ـ

6

استثمر فيصل مبلغ 90000ريال في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18% ، والآخر في مشروع عقاري نسبة ربحه السنوي 42% ، فإذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد.

المبلغ المستثمر في الصناعة = $90000 - x$

المبلغ المستثمر في العقار = x

$$0.18(90000 - x) + 0.42x$$

$$= 16200 - 0.18x + 0.42x$$

$$= 16200 + 0.24x$$

كثيرة الحدود هي: $16200 + 0.24x$

تـــأكـد :ـ

مثال 1

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أياً من المتغيرات لا يساوي صفراً:

1 $(2a^3 b^{-2})(-4a^2 b^4)$

$$(2a^3 b^{-2})(-4a^2 b^4) = 2(-4) \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^{-2} \cdot b^4$$
$$= -8 \cdot a^{3+2} \cdot b^{-2+4}$$
$$= -8 a^5 b^2$$

2 $\frac{12x^4y^2}{2xy^5}$

$$\frac{12x^4y^2}{2xy^5} = \frac{6.2\,x.x.x.x.y.y}{2.x.y.y.y.y.y}$$

$$= \frac{6x^3}{y^3}$$

تـــأكـد :-

3 $\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3$

$$\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^3 = \frac{(2a^2)^3}{(3b)^3}$$

$$= \frac{2^3(a^2)^3}{3^3b^3}$$

$$= \frac{8a^6}{27b^3}$$



تـــأكـد :-

مثـال 2

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

5	$3x + 4y$	نعم	1
6	$\frac{1}{2}x^2 - 7y$	نعم	2
7	$x^2 + \sqrt{x}$	لا	
8	$\frac{ab^3-1}{az^4+3}$	لا	

تــــأكـد :ـ

مثـال 6-4-3

بسط كلاً مما يأتي:

9 $(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$

$$(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$$
$$= x^2 - 5x + 2 - 3x^2 - x + 1$$
$$= x^2 - 3x^2 - 5x - x + 2 + 1$$
$$= -2x^2 - 6x + 3$$

تـــأكـد :-

مثال 3-4-6

بسط كلاً مما يأتي:

10 $(3a + 4b) + (6a - 6b)$

$$(3a + 4b) + (6a - 6b)$$
$$= 3a + 4b + 6a - 6b$$
$$= 3a + 6a + 4b - 6b$$
$$= 9a - 2b$$

تـــأكـد :-

مثـال 3-4-6

بسط كلاً مما يأتي:

11 $3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$

$$3x^2(2xy - 3xy^2 + 4x^2y^3)$$
$$= 3x^2(2xy) + 3x^2(-3xy^2) + 3x^2(4x^2y^3)$$
$$= 6x^3y - 9x^3y^2 + 12x^4y^3$$

تـــأكـد :–

مثـــال 6-4-3

بسط كلاً مما يأتي:

12 $(n-9)(n+7)$

$$(n-9)(n+7) = n^2 + 7n - 9n - 63$$
$$= n^2 - 2n - 63$$

مثال 6

تـــأكـد :-

13) رياضة: يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 دقيقة يومياً. وعند ركضه يحرق 10سعرات حرارية في الدقيقة. أما عندما يرفع الأثقال يحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة. فإذا مارس رفع الأثقال x دقيقة في أحد الأيام، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم.

مدة الركض = $75 - x$

مدة رفع الأثقال = x

$$10(75 - x) + 7.5x$$

$$= 750 - 10x + 7.5x$$

$$= 750 - 2.5x$$

كثيرة الحدود هي: $750 - 2.5x$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

بسّط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

14 $(5x^3 y^{-5})(4xy^3)$

$$(5x^3 y^{-5})(4xy^3) = 5(4)\, x^3 . x . y^{-5} . y^3$$

$$= 20\, x^{3+1} . y^{-5+3}$$

$$= 20\, x^4 . y^{-2}$$

$$= 20\, x^4 . \frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{20x^4}{y^2}$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

بسّط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

15

$$\frac{-y^3z^5}{y^2z^3}$$

$$\frac{-y^3z^5}{y^2z^3} = -\ y^{3-2}\ \ z^{5-3}$$

$$= -\ y^1\ \ z^2$$

$$= -yz^2$$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

بسّط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

16 $\dfrac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2}$

$$\frac{-7x^5y^5z^4}{21x^7y^5z^2} = \frac{-1}{3}\ x^{5-7} \ .\ y^{5-5}\ .\ z^{4-2}$$

$$= \frac{-1}{3}\ x^{-2}\ .\ y^{0}\ .\ z^{2}$$

$$= \frac{-1}{3}\ x^{-2}\ .\ y^{0}\ .\ z^{2}$$

$$= \frac{-1}{3} . \frac{1}{x^2} . 1 . z^2$$

$$= \frac{-z^2}{3x^2}$$

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 1

بسّط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

17 $(n^5)^4$

$$(n^5)^4 = n^{20}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا وإن كانت كذلك فاذكر درجتها:

18) $2x^2 - 3x + 5$	نعم	2
19) $a^3 - 11$	نعم	3
20) $\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$	لا	
21) $\sqrt{m - 7}$	لا	

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مـثـال 3-4-6

بسّط كلاً مما يأتي:

22 $(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$

$$(6a^2 + 5a + 10) - (4a^2 + 6a + 12)$$

$$= 6a^2 + 5a + 10 - 4a^2 - 6a - 12$$

$$= 6a^2 - 4a^2 + 5a - 6a + 10 - 12$$

$$= 2a^2 - a - 2$$

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 3-4-6

بسّط كلاً مما يأتي:

23 $4x(2x^2 + y)$

$$4x(2x^2 + y) = 8x^3 + 4xy$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3-4-6

بسّط كلاً مما يأتي:

24 $(x-y)(x^2+2xy+y^2)$

$$(x-y)(x^2+2xy+y^2)$$

$$= x\,(x^2+2xy+y^2) - y\,(x^2+2xy+y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 - yx^2 - 2xy^2 - y^3$$

$$= x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$$

تـدرب وحـل المسائل :-

25 $(a+b)(a^3-3ab-b^2)$

$$(a+b)(a^3-3ab-b^2)$$

$$= a\ (a^3-3ab-b^2) + b\ (a^3-3ab-b^2)$$

$$= a^4 - 3a^2b - ab^2 + a^3b - 3ab^2 - b^3$$

$$= a^4 + a^3b - 3a^2b - 4ab^2 - b^3$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 6

26) مزرعة: استأجر سلمان عاملين لتنسيق مزرعته ، فإذا الأول 200 ريال عن كل يوم عمل وتقاضي الثاني 150 ريال عن كل يوم عمل ، واحتاجت المزرعة 15يوم عمل أكتب كثيرة حدود تبين تكلفة المزرعة إذا عمل الأول x يوما

عدد أيام عمل الأول = x

عدد أيام عمل الثاني = $15 - x$

كثيرة الحدود هي $150(15 - x) + 200x$

$= 2250 - 150x + 200x$

$= 2250 + 50x$

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4 \quad (27$$

$$\left(\frac{8x^2y^3}{24x^3y^2}\right)^4 = \left(\frac{1y^1}{3x^1}\right)^4$$

$$= \frac{y^4}{81x^4}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2} \quad (28$$

$$\left(\frac{4x^{-2}y^3}{xy^{-4}}\right)^{-2} = \left(\frac{xy^{-4}}{4x^{-2}y^3}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{xy^{-4}}{4x^{-2}y^3}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{x^2x}{4y^3y^4}\right)^{2}$$

$$= \left(\frac{x^3}{4y^7}\right)^{2}$$

$$= \frac{x^6}{16y^{14}}$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$(a^2 b^3)(ab)^{-2}$ (29

$$(a^2 b^3)(ab)^{-2} = (a^2 b^3)(\frac{1}{ab})^2$$

$$= (a^2 b^3)(\frac{1}{a^2 b^2})$$

$$= a^{2-2} \; . \; b^{3-2}$$

$$= a^0 \; . \; b^1$$

$$= b$$

تدرب وحل المسائل :–

مثال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$(-3x^3y)^2(4xy^2)$ (30

$$(-3x^3y)^2(4xy^2) = (9x^6y^2)(4xy^2)$$
$$= 36x^7y^4$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

(31 $\dfrac{3c^2\,d(2c^3d^5)}{15c^4d^2}$

$$\frac{3c^2\,d(2c^3d^5)}{15c^4d^2} = \frac{6c^5\,d^6}{15c^4d^2}$$

$$= \frac{2}{5}c\,d^4$$



تـدرب وحـل المسـائل :–

مثـال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$\frac{1}{4}\ \mathbf{g}^2(\ 8\mathbf{g} + 12\boldsymbol{h} - 16\mathbf{g}^3\boldsymbol{h}^2)\ (32$$

$$\frac{1}{4}\ \mathbf{g}^2(\ 8\ \mathbf{g} + 12\boldsymbol{h} - 16\ \mathbf{g}\ \boldsymbol{h}^2)$$

$$= \ 2\ \mathbf{g}^3 + 3\ \boldsymbol{h}\mathbf{g}^2\ \ - 4\ \mathbf{g}^3\boldsymbol{h}^2$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

33) $x^{-2}\left(x^4 - 3x^3 + x^{-1}\right)$

$$x^{-2}\left(x^4 - 3x^3 + x^{-1}\right)$$

$$= x^2 - 3x^1 + x^{-3}$$

$$= x^2 - 3x + \frac{1}{x^3}$$

الفهرس

تـدرب وحـل المسـائل :ـ

مثـال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$a^{-3}b^{2}(ba^{3} + b^{-1}a^{2} + b^{-2}a) \quad (34$$

$$a^{-3}b^{2}(ba^{3} + b^{-1}a^{2} + b^{-2}a)$$

$$= a^{0}\,b^{3} + a^{-1}\,b^{1} + a^{-2}\,b^{0}$$

$$= b^{3} + \frac{b}{a} + \frac{1}{a^{2}}$$

الفهرس

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$$(n^2 - 7)(2n^3 + 4) \quad (35$$

$$(n^2 - 7)(2n^3 + 4)$$

$$= n^2(2n^3 + 4) - 7(2n^3 + 4)$$

$$= 2n^5 + 4n^2 - 14n^3 - 28$$

$$= 2n^5 - 14n^3 + 4n^2 - 28$$

الفهرس

تدرب وحل المسائل :-

مثال 6

بسط كلاً مما يأتي مفترضاً أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

$(2x - 2y)^3$ (36

$$(2x - 2y)^3$$

$$= (2x - 2y)(2x - 2y)(2x - 2y)$$

$$= (4x^2 - 4xy - 4xy + 4y^2)(2x - 2y)$$

$$= (4x^2 - 8xy + 4y^2)(2x - 2y)$$

$$= 8x^3 - 16x^2y + 8xy^2 - 8x^2y + 16xy^2 - 8y^3$$

$$= 8x^3 - 24x^2y + 24xy^2 - 8y^3$$

الفهرس

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

فيما سبق:

درست قسمة وحيدات الحد. (الدرس 3 - 3)

والآن:

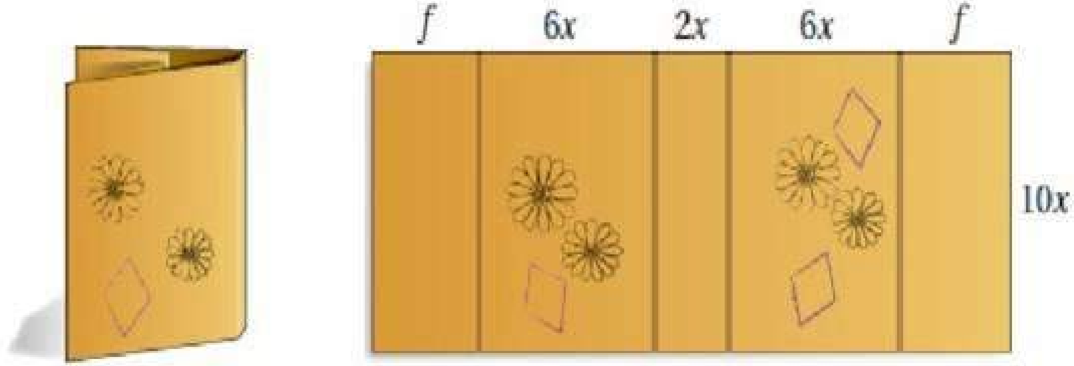
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:

القسمة التركيبية
Synthetic division

لماذا؟

تحتاج سلمى إلى $(140x^2 + 60x)$ بوصة مربعة من الورق لعمل غلاف لكتاب طوله $10x$ بوصات. ويظهر الشكل أدناه الجزء الذي تركته للثني على جانبي الغلاف. فإذا كان عرض كعب الغلاف $2x$ بوصة، وعرض كل من الغلاف الأمامي والخلفي $6x$ بوصة، فما عرض كل من جزأي الثني؟ يمكنك استعمال قسمة كثيرات الحدود لمساعدتك على إيجاد الجواب.



f = عرض الثنية

القسمة الطويلة: تعلمت في الدرس (3 – 3) قسمة وحيدات الحد، لذا يمكنك قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد مستعملًا المهارات نفسها.

الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

فيما سبق:

درست قسمة وحيدات الحد. (الدرس 3 - 3)

والآن:

- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة الطويلة.
- أقسم كثيرات الحدود مستعملاً القسمة التركيبية.

المفردات:

القسمة التركيبية
Synthetic division

مثال 1

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسّط العبارة : $\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy}$.

اقسم كل حد في البسط على المقام

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} = \frac{6x^4y^3}{3xy} + \frac{12x^3y^2}{3xy} - \frac{18x^2y}{3xy}$$

اقسم

$$= \frac{6}{3} \cdot x^{4-1}y^{3-1} + \frac{12}{3} \cdot x^{3-1}y^{2-1} - \frac{18}{3} \cdot x^{2-1}y^{1-1}$$

$y^{1-1} = y^0 = 1$

$$= 2x^3y^2 + 4x^2y - 6x$$

www.obeikaneducation.com



الفصل الثالث
٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

(1A

بسّط المقدار $\dfrac{20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf}{4cdf}$

$$\frac{20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf}{4cdf}$$

$$= \frac{20c^4d^2f}{4cdf} - \frac{16cdf^2}{4cdf} + \frac{4cdf}{4cdf}$$

$$= 5\,c^3d - 4f + 1$$

الفصل الثالث
٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

1B) بسّط المقدار $(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$

$$\frac{18x^2y + 27x^3y^2z}{3xy} = \frac{18x^2y}{3xy} + \frac{27x^3y^2z}{3xy}$$

$$= 6x + 9x^2yz$$

الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

يمكنك استعمال عملية مشابهة للقسمة الطويلة لقسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى. وتسمى خطواتها خوارزمية القسمة.

مثال 2 قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى

استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$.

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{\big) x^2 + 3x - 40} \\ (-)\ x^2 - 5x \qquad \\ \hline 8x - 40 \\ (-)\ 8x - 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

اضرب المقسوم عليه في x

اطرح

اضرب المقسوم عليه في 8

اطرح

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:

- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا حسب درجتها.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ، حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.



الفصل الثالث
٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

2) استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:

2A) $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

$$x + 10$$

$$x - 3 \;)\; x^2 + 7x - 30$$

$$(-)\; x^2 - 3x$$

$$10x - 30$$

$$(-)\; 10x - 30$$

$$0$$

تحقق من فهمك :-

(2 استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج:

(2B $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 12 \\
\hline
x - 1 & x^2 - 13x + 12 \\
 & (-)\; x^2 - x \\
\hline
 & -12x + 12 \\
 & (-)\; -12x + 12 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$



الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

قد ينتج باقٍ عن قسمة كثيرتي حدود كما في قسمة الأعداد الكلية، فمثلًا عند إيجاد $11 \div 3$ يكون الناتج 3 والباقي 2، وتكتب عادةً على الصورة $3 + \frac{2}{3}$. ويمكنك كتابة نتيجة قسمة كثيرتي حدود مع باقٍ بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

الاختيار من متعدد

يمكنك حذف بعض البدائل عن طريق اختيار قيمة للمتغير a ثم تعويض هذه القيمة في العبارة الأصلية وفي البدائل وإيجاد قيمة كل منها.

مثال 3 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3 - a}$

B $-a + 10$

C $-a - 10 + \frac{19}{3 - a}$

D $-a - 10 - \frac{19}{3 - a}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس 1−، فهذه إذن مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$

Dividing Polynomials

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r} -a - 10 \\ -a + 3 \overline{\big) a^2 + 7a - 11} \\ (-)\ a^2 - 3a \\ \hline 10a - 11 \\ (-)\ 10a - 30 \\ \hline 19 \end{array}$$

لتسهيل عملية القسمة، أعد كتابة $a - 3$ على الصورة $-a + 3$

$-a(-a + 3) = a^2 - 3a$

$7a - (-3a) = 10a$

$-10(-a + 3) = 10a - 30$

$-11 - (-30) = 19$

ناتج القسمة هو $-a - 10$، والباقي 19 .

لذا فإن $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3 - a}$، ومن ثم تكون الإجابة هي البديل C.



الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

3) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(1-r)^{-1}\ (r^2+5r+7)$؟

F $-r-6+\frac{13}{1-r}$

H $r-6+\frac{13}{1-r}$

G $r+6$

J $r+6-\frac{13}{1-r}$

$$\begin{array}{r} -r-6 \\ -r+1\ \overline{)\ r^2+5r+7} \\ (-)\ r^2-r \\ \hline 6r+7 \\ (-)\ 6r-6 \\ \hline 13 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $-r-6+\frac{13}{1-r}$



الفصل الثالث
٣-٤ قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

القسمة التركيبية : القسمة التركيبية هي طريقة مبسّطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد.

مفهوم أساسي — القسمة التركيبية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 : اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x-r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2 : اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3 : اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4 : كرر الخطوتين 3 , 2 على ناتج الجمع في الخطوة السابقةحتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.



الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

مثال 4 القسمة التركيبية

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$.

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم. واكتب الثابت r في الصندوق، وهو في هذا المثال 4. ثم اكتب المعامل الأول وهو 2 أسفل الخط الأفقي.

4	2	−13	26	−24
	↓			
	2			

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم $2x^3 - 4x^2 + 6$ فاكتبه في صورة $2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$



٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في الثابت r:

$2\,(4) = 8$ ، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني

4	2	−13	26	−24
		8		
	2 ↗			|

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني:

$$-13 + 8 = -5$$

4	2	−13	26	−24
		8		
	2	−5		|

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكَّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم

$$2x^3 - 4x^2 + 6$$

فاكتبه في صورة

$$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$$

Dividing Polynomials

الخطوة 4: اضرب المجموع وهو 5− في الثابت r: $-5 \times 4 = -20$،

واكتب الناتج أسفل المعامل التالي، ثم اجمع:

$26+(-20)=6$. اضرب المجموع وهو 6 في الثابت r:

$6\ (4) = 24$، واكتب ناتج الضرب تحت المعامل التالي،

ثم اجمع: $-24 + 24 = 0$.

إذن ناتج القسمة هو $2x^2 - 5x + 6$، والباقي 0.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 2 & -13 & 26 & -24 \\ & & 8 & -20 & 24 \\ \hline & 2 & -5 \nearrow & 6 \nearrow & | \ 0 \end{array}$$

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكّر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم

$2x^3 - 4x^2 + 6$

فاكتبه في صورة

$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$



٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

تحقق: اضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه، فيكون الناتج هو المقسوم.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^2 & -\ 5x & +\ 6 \\
(\times) & & & x & -\ 4 \\
\hline
 & & -8x^2 & +\ 20x & -\ 24 \\
(+) & 2x^3 & -\ 5x^2 & +\ 6x & \\
\hline
 & 2x^3 & -\ 13x^2 & +\ 26x & -\ 24
\end{array}
$$

تنبيه!

القسمة التركيبية

تذكَر أن الحدود تجمع ولا تطرح عند إجراء القسمة التركيبية.

إرشادات للدراسة

القسمة التركيبية

إذا لم يوجد أحد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامله صفرًا. فمثلًا إذا كان المقسوم
$2x^3 - 4x^2 + 6$
فاكتبه في صورة
$2x^3 - 4x^2 + 0x + 6$

تحقق من فهمك :-

4) استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

(4A

$$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$$

-3	2	3	-4	15
	↓	-6	9	-15
	2	-3	5	0

ناتج القسمة هو $2x^2 - 3x + 5$ والباقي 0.

الفصل الثالــث

٣-٤ قسمة كثيرات الحـــدود

تحقق من فهمك :-

4) استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

(4B

$$(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$$

2	3	-8	11	-14
	↓	6	-4	14
	3	-2	7	0

ناتج القسمة هو $3x^2 - 2x + 7$ والباقي 0.



الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

$(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$ (4C

إذا لم يوجد أحد الحدود
في كثيرة حدود
المقسوم فأضفه
وليكن معامله صفرا

	a^4	a^3	a^2	a	
-2	4	0	2	-4	12
	↓	-8	16	-36	80
	4	-8	18	-40	92

ناتج القسمة هو :

$4a^3 - 8a^2 + 18a - 40 + \frac{92}{a+2}$



الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

(4D

$$(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$$

2	6	-8	0	12	-14
	↓	12	8	16	56
	6	4	8	28	42

ناتج القسمة هو :

$$6b^3 + 4b^2 + 8b + 28 + \frac{42}{b-2}$$

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

مثال 5 معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد ناتج: $(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div (3x + 1)$.

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x}{3x + 1} = \frac{(3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x) \div 3}{(3x + 1) \div 3}$$

أعد كتابة العبارة ليكون معامل x في المقسوم عليه 1 وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على 3.

$$= \frac{x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

بسّط كلًّا من البسط والمقام

وبما أن المقسوم لا يحتوي حدًّا ثابتًا، فضع صفرًا مكانه.

$x - r = x + \frac{1}{3},\ r = -\frac{1}{3} \rightarrow$

$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0
		$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	1	-2	1	2	$-\frac{2}{3}$

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

Dividing Polynomials

تنبيه!

قسمة جميع الحدود
تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

وعليه فإن الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}}$. وأخيرًا بسّط الكسر

$$\frac{\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{3}} = \frac{3 \times \frac{2}{3}}{3 \times (x+\frac{1}{3})}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في العدد 3

$$= \frac{2}{3x+1}$$ بسّط

وعليه يكون الناتج هو: $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x+1}$.



الفصل الثالث

٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

تحقق: أوجد ناتج القسمة مستعملاً القسمة الطويلة.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 2x^2 + x + 2 \\
\hline
3x + 1 & 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 7x \\
(-) & 3x^4 + x^3 \\
\hline
 & -6x^3 + x^2 + 7x \\
(-) & -6x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & 3x^2 + 7x \\
(-) & 3x^2 + x \\
\hline
 & 6x \\
(-) & 6x + 2 \\
\hline
 & -2
\end{array}
$$

وعليه يكون الناتج هو $x^3 - 2x^2 + x + 2 - \frac{2}{3x+1}$. ✓

تنبيه!

قسمة جميع الحدود

تذكّر أن تقسم جميع الحدود في البسط والمقام على معامل x في المقام.

تحقق من فهمك :-

5) استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

(5A

$$(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$$

$$\left(4x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 2\right) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$-\frac{1}{2}$	4	0	-2	$\frac{1}{2}$	2
	↓	-2	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	4	-2	-1	1	$\frac{3}{2}$

ناتج القسمة هو :

$$4x^3 - 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{2x+1}$$



الفصل الثالث
٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

5) استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

5B)

$$(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4) \div (4y - 1)$$

$$\left(2y^5 - \frac{1}{2}y^4 - 4y^2 + 1\right) \div \left(y - \frac{1}{4}\right)$$

$\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	0	-4	0	1
	↓	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{4}$
	2	0	0	-4	-1	$\frac{3}{4}$

ناتج القسمة هو :

$$2y^4 - 4y - 1 + \frac{3}{4y-1}$$

الفصل الثالث
٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

(5C

$$(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6) \div (5b - 4)$$

$$\left(3b^3 + \frac{8}{5}b^2 - \frac{21}{5}b + \frac{6}{5}\right) \div \left(b - \frac{4}{5}\right)$$

$\frac{4}{5}$	3	$\frac{8}{5}$	$-\frac{21}{5}$	$\frac{6}{5}$
	↓	$\frac{12}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{-4}{5}$
	3	4	-1	$\frac{2}{5}$

ناتج القسمة هو :

$$3b^2 + 4b - 1 + \frac{2}{5b - 4}$$

الفصل الثالث
٣-٤ قسمة كثيرات الحدود

تحقق من فهمك :-

(5D

$$(6c^3 - 17c^2 + 6c + 8) \div (3c - 4)$$

$$(2c^3 - \frac{17}{3}c^2 + 2c + \frac{8}{3}) \div (c - \frac{4}{3})$$

$\frac{4}{3}$	2	$\frac{-17}{3}$	2	$\frac{8}{3}$
	↓	$\frac{8}{3}$	-4	$\frac{-8}{3}$
	2	-3	-2	0

ناتج القسمة هو :

$$2c^2 - 3c - 2$$

تــــأكـد :-

مثال 1

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

1) $\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2 y}{xy}$

$$\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2 y}{xy} = \frac{4xy^2}{xy} - \frac{2xy}{xy} + \frac{2x^2 y}{xy}$$

$$= \frac{4y}{1} - \frac{2}{1} + \frac{2x}{1}$$

$$= 4y + 2x - 2$$

تـــأكـد :–

مثـال 1

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$(3a^2 b - 6ab + 5ab^2)(ab)^{-1}$ (2

$$\frac{3a^2b - 6ab + 5\,ab^2}{ab} = \frac{3a^2b}{ab} - \frac{6ab}{ab} + \frac{5\,ab^2}{ab}$$

$$= \frac{3a^2b}{ab} - \frac{6ab}{ab} + \frac{5\,ab^2}{ab}$$

$$= 3a + 5b - 6$$



تــــأكـد :-

مـثـال 2-4

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلّ ممّا يأتي:

3) $(x^2 - 6x - 20) \div (x + 2)$

$$\begin{array}{r|l} & x - 8 \\ \hline x + 2 \;) & x^2 - 6x - 20 \\ & (-)\; x^2 + 2x \\ \hline & -8x - 20 \\ & (-)\; -8x - 16 \\ \hline & -4 \end{array}$$

حل آخر:

−2	1	−6	−20
	↓	−2	16
	1	−8	−4

ناتج القسمة هو $x - 8 - \frac{4}{x+2}$

تـــأكـد :-

مثال 2-4

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

4) $(2a^2 - 4a - 8) \div (a + 1)$

$$\begin{array}{r|l} & 2a \quad - 6 \\ \hline a + 1 & 2a^2 - 4a - 8 \\ & (-)\ 2a^2 + 2a \\ \hline & \quad -6a - 8 \\ & (-)\ -6a - 6 \\ \hline & \quad -2 \end{array}$$

حل آخر:

−1	2	−4	−8
	↓	−2	6
	2	−6	−2

ناتج القسمة هو $2a - 6 - \frac{2}{a+1}$



تــأكـد :-

مثال 4-2

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلّ ممَّا يأتي:

$(3z^4 - 6z^3 - 9z^2 + 3z - 6) \div (z + 3)$ (5

-3	3	-6	-9	3	-6
	↓	-9	45	-108	315
	3	-15	36	-105	309

ناتج القسمة هو

$$3z^3 - 15z^2 + 36z - 105 + \frac{309}{z+3}$$

تــــأكــد :-

مـثـال 2-4

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلّ ممّا يأتي:

6) $(y^5 - 3y^2 - 20) \div (y - 2)$

2	1	0	0	-3	0	-20
	↓	2	4	8	10	20
	1	2	4	5	10	0

ناتج القسمة هو

$$y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 5y + 10$$

تــــأكـد :-

مثال 3

7) اختيار من متعدد: أي مما يأتي يكافئ المقدار

$(x^2 + 3x - 9) (4 - x)^{-1}$ ؟

A $-x-7+\frac{19}{4-x}$ C $x+7-\frac{19}{4-x}$

B $-x-7$ D $-x-7-\frac{19}{4-x}$

$$\begin{array}{r l}
 & -x \quad -7 \\
-x+4 \;) & x^2 + 3x - 9 \\
 & (-)\; x^2 - 4x \\
 & \hline 7x - 9 \\
 & (-)\; -7x - 28 \\
 & \hline 19
\end{array}$$

ناتج القسمة هو $-x-7+\frac{19}{4-x}$

تـــأكـد :–

مثال 5

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

8) $(10x^2 + 15x + 20) \div (5x + 5)$

$$
\begin{array}{r l}
 & \quad 2x + 1 \\
5x + 5 \;) & \overline{10x^2 + 15x + 20} \\
(-) & 10x^2 + 10x \\
 & \overline{\qquad\quad 5x + 20} \\
(-) & \qquad\quad 5x + 5 \\
 & \overline{\qquad\qquad\quad 15}
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $2x + 1 + \frac{15}{5x+5}$



تــــأكــد :–

مثـال 5

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

$(18a^2 + 6a + 9) \div (3a - 2)$ (9

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x + 1 \\ \hline 5x + 5 & 10x^2 + 15x + 20 \\ & (-)\ 10x^2 + 10x \\ \hline & \qquad\qquad 5x + 20 \\ & \qquad (-)\ 5x + 5 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 15 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $2x + 1 + \frac{15}{5x+5}$



تــأكـد :-

مثال 5

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

(10 $\dfrac{12b^2+23b+15}{3b+8}$

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 4b-3 \\
\cline{2-2}
3b+8 \,) & 12b^2+23b+15 \\
(-) & 12b^2+32b \\
\cline{2-2}
 & -9b+15 \\
(-) & -9b-24 \\
\cline{2-2}
 & 39
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $4b-3+\dfrac{39}{3b+8}$

تــأكـد :-

مثال 5

استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج:

(11 $\dfrac{27y^2+27y-30}{9y-6}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3y+5 \\
\hline
9y-6 & 27y^2+27y-30 \\
 & (-)\ 27y^2-18y \\
\hline
 & 45y-30 \\
 & (-)\ 45y-30 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $3y+5$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

12) $\dfrac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab}$

$$\frac{24a^3b^2 - 16a^2b^3}{8ab} = \frac{24a^3b^2}{8ab} - \frac{16a^2b^3}{8ab}$$

$$= 3a^2b - 2ab^2$$

تـدرب وحـل المسـائل :-

مثـال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$\frac{5x^2\,y-10\,xy+15xy^2}{5xy} \quad (13$$

$$\frac{5x^2\,y-10\,xy+15xy^2}{5xy}=\frac{5x^2\,y}{5xy}-\frac{10\,xy}{5xy}-\frac{15xy^2}{5xy}$$

$$= x - 3y - 2$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

14) $\frac{7g^3h^2+3g^2h-2gh^3}{gh}$

$$\frac{7g^3h^2+3g^2h-2gh^3}{gh} = \frac{7g^3h^2}{gh} + \frac{3g^2h}{gh} - \frac{2gh^3}{gh}$$

$$= 7g^2h + 3g - 2h^2$$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$\frac{4a^3b-6ab+2ab^2}{2ab} \quad (15$$

$$\frac{4a^3b-6ab+2ab^2}{2ab} = 2a^2 + b - 3$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

16) $\dfrac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2}$

$$\frac{16c^4d^4 - 24c^2d^2}{4c^2d^2} = 4c^2d^2 - 6$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

(17 $$\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2}$$

$$\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^3}{3n^2p^2} = 3np + 7p - 6$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

18) مخبز: يقدر عدد أرغفة الخبز التي ينتجها مخبز في اليوم بالعبارة: $-w^2 + 16w + 1000$ ، حيث w عدد العاملين في المخبز . اقسم العبارة المعطاة على w لتجد معدل عدد الأرغفة التي ينتجها العامل الواحد.

$$\frac{-w^2+16w+1000}{w} = -w + 16 + \frac{1000}{w}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$ (19

$$
\begin{array}{r}
a - 10 \\
a + 2 \,\big)\, \overline{a^2 - 8a - 26} \\
(-)\; a^2 + 2a \\
\hline
-10a - 26 \\
(-)\; -10x - 20 \\
\hline
-6
\end{array}
$$

حل آخر:

−2	1	−8	−26
	↓	−2	20
	1	−10	−6

ناتج القسمة هو $a - 10 - \frac{6}{a+2}$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 1

بسط كل عبارة فيما يأتي:

20) $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$

$$
\begin{array}{r l}
 & b^2 - 5b + 6 \\
b + 1 \,) & \overline{b^3 - 4b^2 + b - 2} \\
 & (-)\; b^3 + b^2 \\
 & \overline{\quad -5b^2 + b - 2} \\
 & (-)\; -5b^2 - 5b \\
 & \overline{\quad 6b - 2} \\
 & (-)\; 6b + 6 \\
 & \overline{\quad -8}
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $b^2 - 5b + 6 - \dfrac{8}{b+1}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5-4-2

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممّا يأتي:

21) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4)(z - 1)^{-1}$

$(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4) \div (z - 1)$

1	1	-3	2	-4	4
	↓	1	-2	0	-4
	1	-2	0	-4	0

ناتج القسمة هو $z^3 - 2z^2 - 4$

تـدرب وحـل المسـائل :-

مثـال 2-4-5

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

$$(x^5 - 4x^3 + 4x^2) \div (x - 4) \quad (22$$

4	1	0	-4	4	0	0
	↓	4	16	48	208	832
	1	4	12	52	208	832

ناتج القسمة هو

$$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 52x + 208 + \frac{832}{x-2}$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5-4-2

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

(23 $\frac{y^3+11y^2-10y+6}{y+2}$

-2	1	11	-10	6
	↓	-2	-18	56
	1	9	-28	62

ناتج القسمة هو $y^2+9y-28+\frac{62}{y+2}$



تـدرب وحـل المسـائل :-

مثـال 5-4-2

استعمل القسمة الطويلة (خوارزمية القسمة) أو القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

24) $(g^4 - 3g^2 - 18) \div (g - 2)$

2	1	0	-3	0	-18
	↓	2	4	2	4
	1	2	1	2	-14

ناتج القسمة هو $g^3 + 2g^2 + g + 2 - \frac{14}{g-2}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2-4-5

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍ مما يأتي :

25) $(6a^2 - 3a + 9) \div (3a - 2)$

$$
\begin{array}{r}
2a + \frac{1}{3} \\
3a - 2 \,\overline{)\, 6a^2 - 3a + 9} \\
(-)\ 6a^2 - 4a \\
\hline
a + 9 \\
(-)\ a - \frac{2}{3} \\
\hline
\frac{29}{3}
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $2a + \frac{1}{3} + \frac{29}{9a-6}$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5

استعمل القسمة التركيبية؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ مما يأتي :

(26 $$\frac{6x^5 + 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x}{3x+1}$$

بقسمة المقسوم والمقسوم عليه على معامل x وهو 3

$$\frac{2x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x}{x + \frac{1}{3}}$$

$\frac{-1}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	0
	↓	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$
	2	1	0	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$

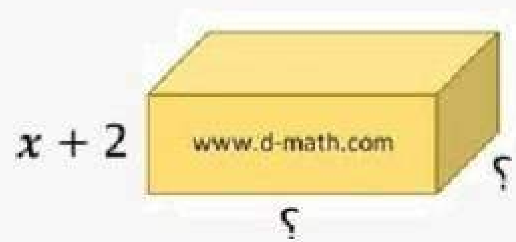
ناتج القسمة هو $2x^4 + x^3 - x + \frac{2}{3} - \frac{2}{9x+3}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

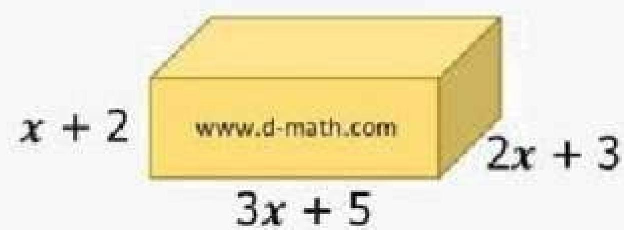
27) هندسة: صُمّم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بحيث ترتبط أبعاده بعلاقة معينة بدلالة المتغير x. فإذا كان حجم الصندوق $6x^3 + 31x^2 + 53x + 30$، وارتفاعه $x + 2$، فما عرضه وما طوله؟

-2	6	31	53	30
	↓	-12	-38	30
	6	19	15	0



ناتج القسمة هو $6x^2 + 19x + 15$

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x + 3)(3x + 5)$$



تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 5

28) فيزياء: يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار I، والقدرة p بالمعادلة $V = \frac{p}{I}$. فإذا عُبّر عن القدرة بالدالة $p(t) = t^3 + 9t^2 + 26t + 24$. وشدة التيار بالمعادلة $I = t + 4$ ، فاكتب عبارة تمثل فرق الجهد V.

$$(t^3 + 9t^2 + 26t + 24) \div (t + 4)$$

-4	1	9	26	24
	↓	-4	-20	-24
	1	5	6	0

ناتج القسمة هو $t^2 + 5t + 6$

إذن فرق الجهد V، $V(t) = t^2 + 5t + 6$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 5

بسط كل عبارة فيما يأتي:

29) $(x^4 - y^4) \div (x - y)$

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x - y}$$

$$= \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)}{x - y}$$

$$= (x + y)(x^2 + y^2)$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

بسط كل عبارة فيما يأتي:

30) $(28c^3d^2 - 21cd^2) \div (14cd)$

$$\frac{28c^3d^2 - 21cd^2}{14cd} = \frac{28c^3d^2}{14cd} - \frac{21cd^2}{14cd}$$

$$= 2\,c^2d - \frac{3d}{2}$$

$$= \frac{4c^2d - 3d}{2}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

بسط كل عبارة فيما يأتي:

(31 $(a^3b^2 - a^2b + 2b)(-ab)^{-1}$

$$(a^3b^2 - a^2b + 2b) \div (-ab) = \frac{a^3b^2 - a^2b + 2b}{-ab}$$

$$= \frac{a^3b^2}{-ab} + \frac{a^2b}{ab} - \frac{2b}{ab}$$

$$= -a^2b + a - \frac{2}{a}$$

تدرب وحل المسائل :–

مثال 5

بسط كل عبارة فيما يأتي:

(32 $\dfrac{n^3+3n^2-5n-4}{n+4}$

-4	1	3	-5	-4
	↓	-4	4	4
	1	-1	-1	0

$= n^2 - n - 1$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

بسط كل عبارة فيما يأتي:

(33 $\dfrac{p^3+2p^2-7p-21}{p+3}$

-3	1	2	-7	-21
	↓	-3	3	12
	1	-1	-4	-9

$$\frac{p^3+2p^2-7p-21}{p+3} = p^2 - p - 4 - \frac{9}{p+3}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

بسط كل عبارة فيما يأتي:

34) $$\frac{3z^5+5z^4+z+5}{z+2}$$

-2	3	5	0	0	1	5
	↓	-6	2	-4	8	-18
	3	-1	2	-4	9	-13

$$\frac{3z^5+5z^4+z+5}{z+2} = 3z^4 - z^3 + 2z^2 - 4z + 9 - \frac{13}{z+2}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

35) أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة باستعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2+100}$ ؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

a) أجر عملية القسمة المعبر عنها بالمقدار: $\frac{3500a^2}{a^2+100}$.

$$
\begin{array}{r l}
 & \quad 3500 \\
a^2 + 100 \;) & \overline{\;3500a^2} \\
 & (-)\; 3500a^2 + 350000 \\
 & \overline{\qquad\qquad -350000}
\end{array}
$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 5

35) أعمال: يمكن تقدير عدد النسخ المبيعة من مجلة باستعمال المعادلة $n = \frac{3500a^2}{a^2+100}$ ؛ حيث a المبلغ الذي تنفقه المجلة على الإعلان بمئات الريالات، و n عدد النسخ المبيعة من المجلة.

b) كم نسخة بيعت من المجلة إذا أنفق على الدعاية والإعلان 6000ريال؟

$$n = \frac{3500a^2}{a^2+100}$$

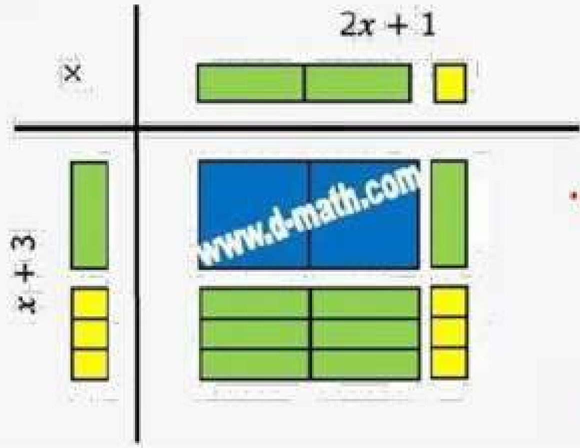
$$= \frac{3500(60)^2}{(60)^2+100}$$

= 3405 نسخة تقريباً

ناتج القسمة هو $3500 - \frac{350{,}000}{a^2+100}$

36) تمثيلات متعددة: افرض أن مساحة مستطيل هي $2x^2 + 7x + 3$، وطوله $2x + 1$.

a) حسياً: مثل الموقف باستعمال البطاقات الجبرية ثم استعملها لإيجاد عرض المستطيل.



العرض يساوي $x + 3$

b) رمزياً: اكتب عبارة جبرية تمثل إيجاد عرض المستطيل.

$$(2x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1)$$

c) عددياً: حل المسألة جبرياً باستعمال القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة وهل يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري؟

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline 2x + 1 & 2x^2 + 7x + 3 \\ & (-)\ 2x^2 + x \\ \hline & 6x + 3 \\ & (-)\ 6x + 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

نعم يتفق الحل باستعمال البطاقات الجبرية مع الحل الجبري

الفهرس